Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos

V. BERMEJO
Universidad Complutense de Madrid *
P. RODRÍGUEZ
Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. de Segovia

RESUMEN

En esta investigación se estudian los factores más relevantes que inciden en la resolución de tareas aditivas, tanto numéricas como verbales. Dos grupos de niños de 2° y 3° de E.G.B. pasan individualmente un conjunto de pruebas. Los resultados muestran la existencia de tres factores estadísticamente significativos: el tipo de problema planteado (numérico, verbal de cambio, verbal de comparación), el lugar ocupado por la incógnita (suma o sumandos) y la edad de los niños. Igualmente, el tipo de errores cometidos parece depender, no sólo de la edad de los sujetos, sino sobre todo de la categoría del problema planteado.

ABSTRACT

In this reseaarch the most relevant factors that influence the solving of additive tasks, numerical and verbal, are studied. Two groups of children from 2 nd and 3 rd of E.G.B. were individually administered a set of tests. The results show that there are three statiscally significant factors: the type of problem formulated (numerical, word change problems, comparison word problems), the place of the unknown (sum or addends) and children's age. Further, the kind of errors seems to depend not only on the subjects' age, but, above all, on the category of the problem formulated.

INTRODUCCION

En la última década se han multiplicado considerablemente las investigaciones en torno a la resolución de problemas aritméticos elementales, haciendo especial hincapié en los problemas verbales. Sobre todo, se ha abordado el análisis de la estructura semántica de los problemas de suma y resta, llevándose a cabo una clasificación de los mismos, con el objetivo de intentar relacionar los procesos de solución empleados por los niños con la estructura del problema planteado (Bermejo y Rodríguez, 1987 b; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1982). Y en este sentido parece existir un consenso general en distinguir cuatro tipos de problemas: de cambio, combina-

* Departamento de Psicología Evolutiva y Educativa. Campus de Somosaguas, 28023 Madrid

Investigaciones Psicológicas, N.° 8 - 1990 - 23-39. Ed. Universidad Complutense. Madrid

ción, comparación e igualación (Carpenter y Moser, 1982, 1983; Heller y Greeno, 1978; Kintsch y Greeno, 1985; Nesher y Greeno, 1981; Riley, Greeno y Heller, 1983: Vergnaud, 1982; Wolters, 1983). En los problemas de cambio hay una cantidad inicial y alguna acción directa o implícita que provoca una modificación en la misma, dando como resultado un incremento o decremento de esta cantidad. Por ejemplo, «Luis tiene 11 cromos. Pedro le da 7 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene Luis ahora?». Los problemas de combinación presentan situaciones en las que se proponen dos cantidades disjuntas, que pueden ser consideradas aisladamente o como partes de un todo, sin que haya ningún tipo de acción. Por ejemplo, «Antonio tiene 8 pinturas y Juan tiene 6. ¿Cuantas pinturas tienen entre los dos?». Los de comparación, como su nombre indica, suponen la relación de dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas: «Javier tiene 6 globos. Mario tiene 9 globos más que Javier. ¿Cuántos globos tiene Mario?». Por último, en los de igualación se describe una acción implícita que tiene que aplicarse a uno de los conjuntos, para que sea igual al segundo. Por ejemplo, «Eva tiene 8 caramelos y Cristina tiene 3. ¿Cuántos caramelos debería añadir Cristina para tener los mismos que Eva?». Asímismo, en cada uno de estos cuatro grupos de problemas, puede variarse, la ubicación de la incógnita, dando lugar en cada caso a diferentes formulaciones. En aras de una mayor brevedad en nuestra exposición, remitimos al lector a los trabajos anteriormente citados para una descripción más amplia.

El nivel de dificultad de estos problemas se explica generalmente en función de tres factores: la estructura semántica, el lugar ocupado por la incógnita y la formulación verbal del problema. Con respecto a la estructura semántica, los trabajos llevados a cabo hasta la fecha (Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Ibarra y Lindvall, 1979; Nesher, 1981; Riley, 1981; Shores y Underhill, 1976; Vergnaud, 1981, etc), apuntan que los problemas de cambio serían más fáciles, siguiéndoles en dificultad los de combinación y comparación. Igualmente, un estudio reciente realizado por los autores de este trabajo (Bermejo y Rodríguez, 1987 a) muestra que los problemas de igualación resultan más complejos que los de combinación, tanto para los niños de segundo de preescolar como para los de primero de EGB. No obstante, estos datos deben ser matizados en función del segundo factor señalado anteriormente, ya que el grado de dificultad depende también del lugar ocupado por la incógnita. Y en este sentido puede señalarse que en los problemas de cambio la dificultad aumenta cuando la incógnita se sitúa en el conjunto de partida, en lugar de hacerlo en el conjunto de cambio o en el resultado. Igualmente, al éxito de los niños desciende en los problemas de comparación, cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos (Riley y otros, 1983). Pero además de la estructura semántica y el lugar ocupado por la incógnita, otros autores (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1980) señalan que la formulación verbal del problema puede también facilitar o dificultar la tarea de los niños. Los resultados de estos estudios muestran que la reformulación verbal de las pruebas, explicitando las relaciones semánticas, sin afectar no obstante a la estructura semántica y matemática de los mismos, facilita notoriamente la comprensión y solución de estas tareas.

Todas estas variables inciden, de un modo u otro, en la representación que el niño se hace de la situación planteada, siendo esta representación indispensable para resolver correctamente la prueba propuesta, tal como se desprende de los modelos de simulación sobre la resolución de problemas elementales de suma y resta (Biars y Larkin, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Greeno, Riley y Gelman, 1984; Kintsch y Greeno, 1985; Riley, Greeno y Heller, 1983). Aunque existen diferencias evidentes entre unos y otros modelos (Bermejo y Lago, 1987), todos ellos convergen en que la mayor parte de las dificultades presentadas por los niños no se deben a la ejecución de la operación correspondiente, sino a la construcción inadecuada de la representación inicial del problema. Así, Kintsch y Greeno (1985) proponen un modelo que resalta de forma explícita tanto el proceso de comprensión del texto, como el proceso de resolución del problema. El proceso de comprensión presenta dos fases: en la primera el sujeto transforma el input verbal en un texto base proposicional, y en la segunda construye la representación interna del problema mediante esquemas de alto orden, que determinan las relaciones entre los conjuntos y asignan los papeles correspondientes a los «actantes» en función del tipo de problema. En la misma línea, De Corte y Verschaffel (1985) proponen un modelo en el que el procesamiento semántico adquiere aún mayor relevancia. El modelo consta de cinco fases: 1) representación global del problema, en la que desempeñan un papel importante dos esquemas: los semánticos, que representan el conocimiento que tiene el sujeto sobre las diferentes relaciones que subyacen a los problemas verbales, y un esquema general llamado «esquema de las palabras del problema» (World Problem Schema, WPS), que hace referencia al conocimiento que tiene el sujeto acerca de la estructura, del papel, y de la intención del problema. El WPS permite reaccionar apropiadamente ante la tarea, aun cuando el texto verbal contenga pocos indicios; orienta su lectura hacia ciertos conceptos y relaciones que son esenciales para la construcción de conjuntos y relaciones de conjuntos, desechando las proposiciones irrelevantes; y por último, facilita la interpretación correcta de las ambigüedades e imprecisiones, obteniendo de este modo una representación completa y coherente. 2) Selección de una operación aritmética formal o una estrategia informal de conteo para encontrar el elemento desconocido. 3) Ejecución de la operación o de la estrategia informal. 4) Reactivación de la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento desconocido por el resultado de su ejecución; y 5) verificación de la solución.

Finalmente, el modelo de Riley y otros (1983), presenta distintos niveles en la representación de los problemas, en función del desarrollo del niño de las tareas concretas planteadas. Los niños del nivel uno, están limitados a representaciones externas de los problemas, utilizando objetos físicos y siendo incapaces de resolver pruebas con la incógnita en uno de los sumandos. En el nivel dos, incluyen un esquema que permite tomar conciencia de que los elementos específicos desempeñan un dobe papel, al estar incluídos tanto en el conjunto como en uno de los subconjuntos, haciendo posible la solución de problemas en los que la incógnita se localiza en uno de los sumandos. Finalmente, el nivel tres añade un nuevo esquema para representar las relaciones, pudiendo el niño construir una representación de las relaciones entre todos los elementos del problema antes de resolverlo y siendo innecesario representar directamente la acción del problema, como ocurriría en los dos niveles anteriores. En consecuencia, el modelo predice que los niños de un nivel determinado responden consistentemente con una estrategia específica a un tipo de problema dado. Así, por ejemplo, en los problemas de cambio los niños del nivel 1 responden con estrategias de modelado directo (counting-all, en la terminología de Carpenter y Moser, 1982), consistentes en representar ambos conjuntos mediante objetos manipulables y contar la unión de ambos. Los del nivel 2 lo hacen con estrategias de conteo a partir de uno de los sumandos (counting-on from first), pero no a partir del sumando mayor (counting-on from larger). Y los del nivel 3 utilizan cualquier tipo de estrategia, incluyendo las memorísticas y las basadas en reglas. Estas predicciones fueron matizadas por Carpenter y Moser (1984), identificando cinco niveles en la evolución de las estrategias en el nivel 1, los niños son incapaces de resolver cualquier problema de suma y resta; en el 2, coincidiendo con el nivel 1 de Riley y otros (1983), los niños utilizan el modelado directo; el 3 es un período transitorio en el que utilizan tanto estrategias de modelado directo como las de conteo; en el 4 se limitan a las de conteo, y en el 5 recurren además a las memorísticas y de reglas.

Teniendo en cuenta las aportaciones mencionadas, nos proponemos estudiar minuciosamente algunos aspectos de la resolución de problemas matemáticos en niños de 2.º y 3.º de EGB. Para ello, formulamos problemas aritméticos elementales en forma verbal y en forma numérica (ecuación), con el objetivo de observar si los procesos cognitivos que los niños ponen en marcha en ambos tipos de situaciones son o no semejantes, siendo así que la competencia operativa sería similar en ambos casos (adición). Por otra parte, presentamos dos tipos de problemas verbales: de cambio y de comparación, a fin de constatar la incidencia de la estructura semántica en la solución de estas tareas. Además, tanto en los poblemas verbales como en los presentados en forma de ecuación, la ubicación de la incógnita coincide en ocasiones con el resultado y en otras con uno de los sumandos, con la finalidad de observar si existen diferencias en la resolución de estas tareas en función de esta variable. Para ello seguimos un diseño factorial mixto de 2X3X2, con medidas repetidas, en el que el primer factor es la edad, el segundo el tipo de problema y el lugar de la incógnita el tercero. En concreto, pretendemos analizar el proceso que siguen los dos grupos de niños para resolver estos problemas, el tipo de errores cometidos en las diferentes situaciones, y las estrategias que utilizan en cada caso particular.

METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Sujetos

Pasan las pruebas sesenta sujetos, elegidos al azar, de segundo y tercero de EGB de un colegio madrileño con clase socio-cultural media-alta. Se distribuyen en dos grupos de treinta niños cada uno. El primero está formado por escolares de segundo de EGB con edades comprendidas entre 7 y 8 años ($\bar{X}$ = 7,7) y el segundo por niños de tercero cuyas edades oscilan entre 8 y 9 años ($\bar{X}$ = 8,4). La relación entre niños y niñas es de 18/12 en el G.I y de 15/15 en el G.II.

Material y procedimiento

Las pruebas son individuales y se realizan en horas lectivas con una duración aproximada de veinte minutos por cada niño. El material utilizado se limita a papel y lápiz.

Se presentan tres tareas: 1) la primera consiste en cuatro ecuaciones; 2) la segunda en cuatro problemas verbales de cambio y 3) la tercera en cuatro problemas verbales de comparación. Las pruebas difieren entre sí por el lugar ocupado por la incógnita y por la disposición de las cantidades, de modo que en el 50% de ellas la incógnita está en la suma y el sumando mayor se situa en el segundo término, mientras que en las restantes la incógnita se ubica en los sumandos y la cantidad mayor ocupa el primer sumando. Por otra parte, las cantidades se seleccionan atendiendo a los siguientes criterios: 1) en ningún caso el resultado de la suma es superior a veinte; 2) uno de los términos alcanza como máximo el valor nueve. Ambos criterios se adoptan para ofrecer sumas no excesivamente complejas, que permitan discriminar convenientemente los dos grupos de sujetos seleccionados. Además, estas cantidades favorecen el uso de todo tipo de estrategias incluyendo las memorísticas y las derivadas de reglas; 3) las cantidades que se presentan en las ecuaciones y en los problemas verbales son similares, variando a lo sumo en una o dos unidades, para poder realizar comparaciones entre ambas tareas.

Con el fin de eliminar posibles efectos debidos al orden de presentación de las pruebas, se lleva a cabo un contrabalanceo de las mismas. En los problemas verbales el experimentador solicita a los niños las siguientes tareas: 1) resolver el problema; 2) que escriba, si no lo ha hecho, la operación que ha realizado; y 3) justificar el método de solución empleado. Con las ecuaciones se sigue un procedimiento similar, pidiendo al niño la explicación verbal de la resolución utilizada.

ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

Llevaremos a cabo análisis cuantitativos y cualitativos, en orden a perfilar mejor el alcance de nuestros resultados y hacer más asequibles y directas las implicaciones prácticas de los mismos en el ámbito educativo. Para facilitar el análisis cuantitativo, hemos realizado transformaciones arcoseno de las respuestas de los niños, obteniendo los resultados recogidos en la tabla n.º 1.

Tabla 1

Medias y desviaciones típicas de respuestas correctas transformadas. A: edad; B: tipo de problema y C: lugar de la incógnita.

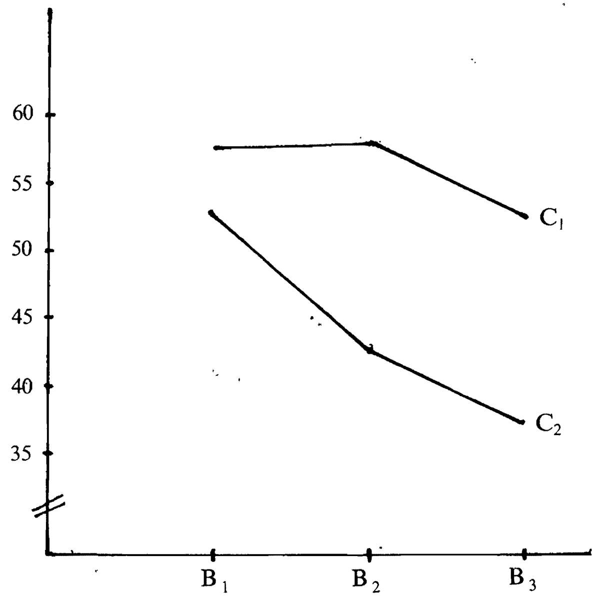
	PROBLEMAS					
	ECUACION(B_1)		CAMBIO(B_2)		COMPARACION(B_3)	
	RES.(C_1)	SUM.(C_2)	RES.(C_1)	SUM.(C_2)	RES.(C_1)	SUM.(C_2)
(A_1) G.I	56(6,8)	50(10,7)	56,5(7,6)	40,5(17,2)	48(12,7)	35,5(10)
(A_2) G.II	58(5,2)	55,5(8,9)	58(6,5)	44,5(12,8)	57(8.3)	38(11,6)

TABLA 2

Resultados del ANOVA.

F_A	$F(1,58) = 7,67$	$p < .01$*
F_B	$F(2,116) = 46,41$	$p < .01$*
F_C	$F(1,58) = 116,03$	$p < .01$*
F_{AB}	$F(2,116) = 1,03$	NS
F_{AC}	$F(1,58) < 1$	NS
F_{BC}	$F(2,116) = 7,55$	$p < .01$*
F_{ABC}	$F(2,116) = 1,41$	NS

El análisis multivariado muestra que las tres variables del plan factorial mixto 2×3×2 con medidas repetidas son significativas, así como la interacción (B×C), tal como puede constatarse en la tabla n.º 2. Sin embargo, esta interacción (ver gráf. N.º 1) no afecta decisivamente a la significatividad de los factores B y C, ya que al mantener constante uno de ellos, el otro sigue siendo significativo, al menos cuando $\alpha = 0.05$. Por tanto, podemos afirmar que tanto la edad de los niños, como el tipo de problema planteado y el lugar ocupado por la incógnita constituyen variables relevantes que inciden sensiblemente en la resolución de las tareas aditivas presentadas. Pero veamos con más detalles las implicaciones de esta afirmación, siguiendo este orden de análisis: 1) nos ocuparemos en primer lugar de las pruebas numéricas (ecuaciones); 2) después lo haremos de los problemas verbales de cambio y comparacíon, distinguiendo a) las pruebas que llevan la incógnita en el resultado, y b) aquellas que la llevan en uno de los sumandos; 3) estudiaremos la relación posible existente entre las diferentes tareas.

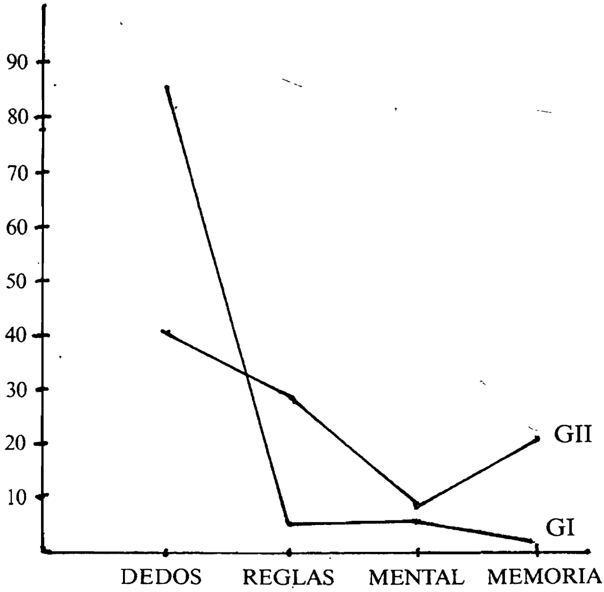


GRAFICA 1

Interacción de los factores B × C.

1. Pruebas numéricas (ecuaciones)

En las ecuaciones, como podemos observar en la tabla N.° 1, las medias de respuestas correctas en cada una de las pruebas es elevada en ambos grupos, excepto cuando la incógnita se halla situada en el primero de los sumandos ($x+7=18$), que sólo la resuelven correctamente el 56, 66% de los niños del G.I. Sin embargo, y como era de esperar, la tarea de los niños se facilita siempre cuando la incógnita se ubica en el resultado. Con respecto a los errores, la mayor parte se localiza en la fase de ejecucion, ya que seleccionan adecuadamente la estrategia de solución, pero se equivocan en el conteo. Los errores restantes se producen en la fase de representación, al intentar resolver la ecuación uniendo el total con el sumando conocido.



GRAFICA 2

Estrategias utilizadas por los dos grupos de niños.

Las estrategias se basan fundamentalmente en el conteo en ambos grupos, tal como puede verse en la gráfica n.º 2. Cuando la incógnita coincide con el resultado, el 85,95% del G.I utilizan las estrategia de contar a partir de uno de los sumandos. Además el 56,67% de estos niños cuentan a partir del número mayor cuando éste está localizado en el segundo sumando. En el G.II se aprecia, por una parte, un descenso de las estrategias de conteo (41,66%), iniciándose generalmente esta estrategia a partir del sumando mayor (80%); y, por otra, aparecen procedimientos más evolucionados, como son: reglas (28,33%), cálculos memorísticos (21,66%) y procedimientos mentales (8,33%). Con las ecuaciones $4+x=13$ y $x+7=18$, la mayoría de los niños del G.I (79,06%) cuentan a partir del número más pequeño hasta el mayor, registrando simultáneamente con sus dedos este conteo, de modo que el resultado es igual número de dedos utilizado. En cambio, en G.II, como ocurría anteriormente, hay un descenso en el uso de esta estrategia (50,73%), debido a la aparición de estrategias más complejas, como es el empleo de reglas (21%) y estimaciones (16%).

2.a. Problemas verbales de cambio y comparación con la incógnita en el resultado.

El alto grado de respuestas correctas que aparecen en las pruebas numéricas no se aprecia, en general, en los problemas verbales de cambio y en los de comparacion, excepto cuando el resultado es desconocido. En este caso, el éxito de los niños es notorio, tal como puede constatarse en la tabla n.º 1. En cuanto a los problemas de cambio, dos datos principales explicarían esta facilidad de ejecución mostrada por los sujetos: el lugar ocupado por la incógnita y la familiaridad con este tipo de problemas. Los datos referentes al lugar de la incógnita coinciden con los ya señalados en estudios anteriores (Bermejo y Rodríguez, 1986, 1987 b), aunque entonces se propusieron otros tipos de problemas (combinación e igualación). De nuevo confirmamos aquí que cuando la incógnita coincide con el todo (suma), la resolución de problemas resulta más sencilla, tal como han sostenido otros autores (De Corte y otros, 1985; Grouws, 1971; Hirstein, 1979; Riley y otros, 1983; Rosenthal y Resnick, 1974). Por otra parte, la familiaridad con el tipo de problema disminuye igualmente su dificultad de resolución, ya que los niños disponen entonces de conocimientos relativos a la intención y a la estructura de la tarea. O, en palabras de De Corte y Verschaffel (1985), significa tener disponible un esquema general (WPS) que le informa de la estructura, papel e intención del problema. Así, por ejemplo, los argumentos que utilizan los niños para explicar el método de solución empleado, hacen referencia frecuentemente a alguna palabra o frase del texto, como por ejemplo, al verbo «dar», que presenta connotaciones semánticas determinadas para estos niños.

Sin embargo, a pesar de que los resultados globales en los dos grupos son muy similares (ver tabla n.º 3), existen diferencias entre ambos tanto con respecto a la utilización que hacen del algoritmo, como de otras estrategias de ejecución. Respecto al algoritmo, muy pocos niños (23,33%)

TABLA 3

Porcentaje de aciertos en cada tipo de problemas para cada grupo de niños

	ECUACION		CAMBIO		COMPARACION	
	RES.	SUM.	RES.	SUM.	RES.	SUM.
G.I	86,66	66,66	88,34	35	60	18,33
G.II	93,33	85	93,33	48,33	90	26,27

del G.I plantean previamente la ecuación, mientras que en el G.II lo hacen el 66,66%. No obstante, los niños que resuelven el problema mediante otro tipo de estrategia, escriben correctamente el algoritmo cuando se les pide que lo hagan. Incluso tres niños que dan como primera respuesta una de las cantidades del enunciado, ejecutan correctamente la operación y eligen el resultado obtenido en la misma como respuesta definitiva, justificando su decisión con una nueva lectura del problema, poniéndose de relieve la conveniencia de utilizar el algoritmo en la solución de problemas verbales. Además, el algoritmo nos permite determinar si el niño se representa correctamente la tarea solicitada. En cuanto a las demás estrategias empleadas, los niños del G.I utilizan sobre todo estrategias de conteo (82,97%), haciéndolo preferentemente a partir del sumando mayor (53,34%). El G.II hace uso sobre todo de estrategias memorísticas (56,89%) y de conteo (29,31%), empezando en general por el sumando mayor. Aquí también aparece una cierta evolución en la utilización de estrategias, al igual que vimos en las pruebas numéricas y han propuesto otros autores (Carpenter y Moser, 1984). Es decir, los niños pequeños tienden a utilizar estrategias de conteo, mientras que los mayores empiezan a preferir estrategias que implican procesos más complejos (ej. reglas).

Con respecto a los problemas de comparación que llevan la incógnita en el resultado, se mantiene el elevado éxito de los niños del G.II, pero no en los del G.I que descienden considerablemente en ambos problemas, como puede verse en la tabla N.º 1 y 3. El fracaso se debe sobre todo a deficiencias durante la fase de representación (83,33%), siendo el error principal la repetición del segundo sumando (76,36%). Estos datos, que también han sido encontrados por otros autores en niveles de escolaridad inferiores (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; De Corte y Verschaffel, 1985; Heller y Greeno, 1978; Riely y Greeno, 1978) pueden explicarse con Mayer (1982), diciendo que los niños interpretan una proposición de relación como una proposición de asignación. En otras palabras, ante el problema: «Javier tiene 6 globos. Mario tiene 9 globos más que Javier. ¿Cuantos globos tiene Mario?», la proposición relacional («Mario tiene 9 globos más que Javier») es interpretada como una proposición de asignación: «Mario tiene 9 globos», y por tanto esa es la solución que dan cuando se pregunta cuántos globos tiene Mario. Además, cuando pedimos que representen el algoritmo utilizado, ocho niños lo plantean correctamente y cuatro lo hacen mal, pero tanto en un caso como en el otro insisten en mantener como resultado la cantidad anteriormente citada, justificando su elección mediante alguna palabra o frase de la formulación del problema, a la que dan una interpretación de asignación y no relacional.

Igualmente, se obtienen resultados similares a los vistos en los problemas de cambio, en relación con las justificaciones de los niños, sus estrategias y la utilización del algoritmo. Con respecto a las estrategias, por ejemplo, se reducen prácticamente al conteo en el G.I, empezando preferentemente por el dato mayor (56,67%); mientras que en G.II se utiliza bastante menos esta estrategia (28,57%), y cuando lo hacen, inician el conteo a partir del número mayor. En cambio, muestran otros procedimientos más evolucionados como, por ejemplo, memoria (39,28%) y mentalmente (21,43%).

2.b Problemas verbales de cambio y comparación con la incógnita en uno de los sumandos

Gran parte de la investigación realizada en la actualidad en torno a los problemas verbales, que tienen la incógnita en uno de los sumandos (p.e. Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Riley y otros, 1983) muestra que los niños pequeños presentan grandes dificultades para resolverlos. Y esta dificultad no parece estar superada en niveles de escolaridad superiores, como puede verse en la tabla n.º 1 y 3. En las pruebas de cambio, las medias descienden sensiblemente tanto en los niños de segundo de E.G.B. como en los de tercero, siendo incluso sorprendente el fracaso de los niños del G.I cuando el primer sumando es desconocido. Los errores tienen lugar prácticamente en la fase de representación (95% en G.I; 93,75% en el G.II), siendo éstos a su vez de dos tipos: repetición de uno de los datos y operación inadecuada. La priemra categoría, menos frecuente, aparece principalmente cuando la incógnita se sitúa en el primer sumando, proponiendo en general los niños la cantidad recogida en el segundo sumando. Estos datos nos hacen pensar que los niños procesan mal el texto verbal debido a que no representan los conjuntos de comienzo y de cambio separadamente, tal como encuentra Harvey (1976) en un estudio anterior. Este autor entrena a niños de primer grado en la resolución de problemas similares, mediante particiones externas que faciliten la distinción de los dos conjuntos, obteniendo resultados favorables. En esta misma línea, Riley y otros (1983) explican el tipo de error que estamos analizando, diciendo que cuando el niño recibe la frase «María tiene algunos lápices» se da cuenta de que no conoce con exactitud el número de lápices que tiene María. Ante la segunda proposición: «Isabel le da 5», crea un conjunto de 5 lápices para María, pero al no haber representado el conjunto de partida, que es desconocido, no se concibe este segundo conjunto como un cambio del sumando inicial, sino simplemente como un conjunto de lápices pertenecientes a María. Seguidamente, la tercera oración, «Ahora María tiene 17 lápices», se interpreta como un incremento en el conjunto anterior, que se identifica como conjunto de partida, a pesar de ser el conjunto de cambio. Por tanto, cuando preguntamos «¿cuantos lápices tenía María al principio?», sería coherente responder 5, es decir, con el número que representa, según él, el conjunto inicial. Posiblemente estos errores disminuirían si enfatizásemos la frase «María tiene algunos lápices» con algún apoyo que facilite su identificación como, por ejemplo «Al principio María tenía algunos lápices», que probablemente describe mejor el proceso dinámico («Al principio-acción-ahora») subyacente al problema.

Los errores de representación más frecuentes se producen cuando el niño opera inadecuadamente, como ocurre con el 84,72% del G.I y con el 86,6% del II. La explicación más plausible de este hecho sería que el niño aplica directamente la forma canónica (a+b=x), que le es familiar, sumando las dos cantidades propuestas para llegar al resultado solicitado. Esta representación desajustada del problema resultaría probablemente de una doble incompresión: por una parte, los niños no llegan a concebir concretamente al significado de la indefinición o vaguedad momentánea de uno de los sumandos («algunos»), asignándole en consecuencia la cantidad propuesta inmediatamente después; y, por otra, no aprecian la información temporal contenida en el texto (ej.: «al principio»). En cambio, los sujetos que resuelven correctamente este tipo de problemas recurren, en la mayor parte de los casos, a la operación de restar, coincidiendo con los resultados aportados por otros autores (Zweng, Gerargty y Turner, 1979); a pesar de que ello suponga una mayor complejidad del proceso resolutivo de la tarea (Case, 1978).

En relación a las estrategias, se sigue manteniendo la misma pauta observada en las otras pruebas (ver gráfica n.º 2). Destacamos aquí los bajos porcentajes de sujetos que recurren directamente al algoritmo resta que difieren notablemente en ambos grupos (G.I: 8,33% vs. G.II: 66,66%). Esta tendencia general que se advierte especialmente en el grupo I, indica que muy pocos niños se percatan de que el algoritmo es un mecanismo que puede facilitar la resolución del problema. Así lo confirman Carpenter, Hiebert y Moser (1983) con niños de primer grado; al observar que, a pesar de darles indicaciones para que escribieran la ecuación antes de resolver el problema, el 25% de los niños solucionan antes el problema y después escriben la ecuación.

Los problemas de comparación resultan aún más difíciles tanto para el G.II, como sobre todo para el G.I (ver tabla n.º 1 y 3). Y esta dificultad procede fundamentalmente de la incapacidad de estos niños para representarse adecuadamente la situación problema, ya que apenas aparecen errores de ejecución (4,5%). Además, el error de la mayoría de los niños, sobre todo de los mayores (92,82%), consiste de nuevo en aplicar la forma canónica (a+b = x) a los datos propuestos; lo que permite suponer la ausencia de un esquema de comparación que organice y oriente el procesamiento de la información contenida en el texto verbal. Una vez más, la presencia de un sumando indefinido («algunos») y la proposición comparativa que determina el otro sumando, resultan difícilmente comprensibles para los sujetos. De aquí que algunos niños focalicen su atención en torno a una palabra o frase clave que les resulta familiar y que habitualmente aparecen relacionadas con un tipo de operación determinada. Así, por ejemplo, justifican el uso de la adición señalando la presencia en el texto de la expresión «más que».

En cuanto a las estrategias utilizadas en estos problemas destacan principalmente dos hechos: por una parte, que la mayoría de los niños del G.II resuelven las tareas de manera memorística (63,57%) o contando a partir de la cantidad menor; y por otra, que los pequeños lo hacen mayoritariamente contando hacia atrás (66,66%). Esta última estrategia, que requiere la utilización de una secuencia de conteo invertida, conlleva una gran dificultad, como han apuntado otros autores (Baroody, 1984; Carpenter y Moser, 1984; Fuson, 1984; Steffe, Spilkes y Hirstein, 1976; Steinberg, 1985); y, curiosamente, los sujetos que la utilizan situan la cantidad mayor en el minuendo y la menor en el sustraendo; mientras que los que recurren al conteo hacia delante invierten el orden de las cantidades, es decir, la cantidad inferior ocupa el minuendo y la mayor el sustraendo.

3. **Relación entre las pruebas**

El comportamiento de los niños en las diferentes tareas aditivas resulta dispar, dependiendo bien de la formulación del problema (verbal-numérico), bien de su estructura semántica, bien del lugar que ocupa la incógnita, bien incluso de la edad de los sujetos. Es obvio que la mención que hacemos a la edad debe entenderse en los términos establecidos por un de los autores de este estudio en otro trabajo (Bermejo, 1982), ya que se trata de una variable asignada. Sin embargo, tal como era esperado, el grupo de los niños mayores obtiene siempre resultados mejores que los pequeños, aumentando en general esta diferencia a medida que se incrementa la dificultad de las pruebas. Resulta más interesante, y con implicaciones educativas obvias, el hecho constatado empíricamente referente a la formulación de la tarea. Desde esta óptica, las pruebas verbales y las numéricas presentan similar dificultad para los niños sólo en los problemas de cambio que tienen la incógnita en el resultado, ya que es la única relación no significativa estadísticamente. En cambio, en la demás situaciones las tareas numéricas resultan más sencillas que las verbales, a pesar de que ambas requieren, en principio, la misma competencia operativa (la operación aditiva). Y la razón de esta diferencia reside en que en las pruebas numéricas sólo se pide la ejecución de una operación presentada de forma de ecuación; mientras que en las tareas verbales se requiere además la presentación mental por parte del niño de la situación formulada verbalmente y su traducción en términos de operación. De aquí que la mayoría de los errores cometidos por los sujetos sean de representación en los problemas verbales (75,62%), siendo más bien de ejecución en las pruebas numéricas (77,68%).

Con respecto a la estructura semántica de los problemas verbales, se han encontrado reiteradamente datos dispares en función de este factor, y en la misma línea apuntan los resultados de este estudio, ya que las pruebas de comparación resultan en general más difíciles que las de cambio, sobre todo para los niños de 2.º de EGB, aunque su diferencia no llega a ser significativa globalmente (B_2-B_3). En el G.II se aprecia menos esta diferencia entre ambos tipos de pruebas. Sin embargo, el éxito de los niños es superior en los problemas de cambio con respecto a los de comparación, principalmente cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos (41,66% en los problemas de cambio, por 22,5% en los de comparación). Y la razón de esa discrepancia radica, a nuestro entender, en que uno de los sumandos se formula en términos comparativos, de modo que la cantidad que tiene un «poseedor» está relacionada numéricamente o cuantitativamente con la que disfruta el otro «poseedor». Por tanto, no se trata de una relación comparativa simple que cuestiona «quien tiene más» o «dónde hay más» al comparar dos conjuntos, que sería relativamente simple y precoz (ver Bermejo, 1985), sino de determinar la cantidad exacta de un «poseedor» relacionándola comparativamente con el conjunto que tiene el otro «poseedor». En cambio, la representación de la situación propuesta en las tareas de cambio es menos compleja, ya que se trata de identificar y relacionar a dos «actantes»: el que da (activo) y el que recibe (pasivo), así como de registrar los conjuntos pertenecientes al uno y al otro.

Pero el factor más significativo en las pruebas verbales sobre todo es, sin duda alguna, el lugar ocupado por la incógnita, tal como puede constatarse en la tabla n.º 2. Además de ser estadísticamente significativas las distintas relaciones entre los niveles del factor C, excepto $B_1C_1 - B_2C_1$; también puede verse esta discrepancia cualitativamente, ya que el G.I obtiene un promedio de 74,16% de aciertos cuando el resultado o total es desconocido, mientras que cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos entonces el éxito de los niños disminuye notoriamente (26,66%). Y esta diferencia llega incluso a incrementarse en términos absolutos en los sujetos mayores, pues en el primer caso alcanza un 91,66% de respuestas correctas, por un 37,49% cuando uno de los sumandos es desconocido. Por tanto, la eficacia de este factor es sobradamente manifiesta, aumentando aún más su incidencia en las tareas de comparación, es decir, en los de mayor complejidad.

Para finalizar este apartado, entendemos que el esquema parte-todo está subyacente en la resolución correcta de todos los problemas aditivos, tal como señalamos en otro trabajo (Bermejo y Rodríguez, 1986). Cuando el niño ha construido este esquema y sabe aplicarlo en las distintas situaciones, entonces se facilita de manera notoria la resolución de los problemas aditivos. No obstante, los factores que acabamos de analizar pueden facilitar o dificultar la aplicación de dicho esquema, dando lugar a comportamientos diversos en los niños.

CONCLUSIONES

Una idea que ha quedado suficientemente esclarecida en lo dicho anteriormente se refiere al grado de dificultad de algunos factores en los diferentes problemas aditivos presentados. El nivel de complejidad de las pruebas numéricas, en general, es inferior al de las pruebas verbales, a pesar de que la competencia operativa exigida en ambas es la misma; es decir, en ambos casos se trata de solventar operaciones de adición idénticas o similares. Y la razón de esta discrepancia radica en que las tareas verbales exigen, además de la ejecución de una operación aditiva, el procesamiento y organización de la información recogida en la formulación del problema, con el objetivo de construir una representación adecuada de la situación concreta, que facilite la resolución de la misma. Por ello, todo aquello que favorezca esta representación, como podría ser la familiaridad de los términos o del contexto presentado, constituye un apoyo indiscutible para el aprendizaje de estos problemas. No obstante, como se puede observar en la tabla n.º 1, las diferencias entre pruebas numéricas y verbales descienden notoriamente cuando los niños poseen un mayor conocimiento sobre los esquemas subyacentes a los problemas verbales.

Pero hay dos factores más que son igualmente importantes para la comprensión de estas pruebas aditivas. El primero concierne al lugar ocupado por la incógnita o dato desconocido, que, como hemos visto, incide significativamente en el éxito de los niños. Cuando se ignora la suma o todo, adoptando la tarea la forma canónica, entonces se facilita en gran medida el acierto de los niños, tanto de los pequeños como de los mayores; en cambio, cuando se desconoce alguno de los sumandos, la dificultad se incrementa considerablemente, debido en parte a la infrecuencia de tales situaciones en los programas escolares. El segundo factor se refiere a la estructura semántica de los problemas verbales de adición, que una vez más (ver Bermejo y Rodríguez, 1987 b) se constata empíricamente su relevancia en la realización de estas pruebas; de modo que los problemas de combinación resultarían los más sencillos, seguidos de cerca por los de cambio, para pasar después a los otros dos tipos de pruebas más complejas, cuales son los de igualación y, finalmente, los de comparación. Las implicaciones escolares de estos datos resultan obvias no sólo en el ámbito de la programación de contenidos matemáticos, sino también en la práctica educativa del aula.

Conviene señalar también que la estrategia utilizada por los niños en la resolución de las tareas solicitadas no sólo depende de la edad de los sujetos, sino también de la dificultad de las pruebas; de modo que el procedimiento de contar, que es el más primitivo, suele aparecer en no pocos niños mayores, cuando aumenta la complejidad de la situación empírica. Finalmente, un tercio aproximadamente de niños del G.II recurren espontáneamente al uso del algoritmo para solucionar las tareas verbales presentadas, mientras que el G.I apenas utiliza este procedimiento, sobre todo en algunos problemas. Pensamos, no obstante, que este uso no sólo facilitaría la realización de la operación misma de adición, sino sobre todo constituiría la mejor traducción concreta de la representación que el niño se hace sobre la situación planteada.

BIBLIOGRAFÍA

BERMEJO, V. (1982): El concepto de cambio evolutivo y la función de la edad en Psicología Evolutiva. *Informes de Psicología, 3,* 15-34.

BERMEJO, V. (1985): Estudio evolutivo de las conductas de clasificación en el niño. Aspectos lingüísticos y perceptivos. *Infancia y Aprendizaje, 31-32,* 211-227.

BERMEJO, V., y LAGO, M. O. (1987): El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. *Papeles del Psicólogo, 32,* 35-47.

BERMEJO, V., y RODRÍGUEZ, P. (1986): El esquema parte-todo en la conservación y adición. *II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación.* Madrid.

BERMEJO, V., y RODRÍGUEZ, P. (1987 a): Fundamentos cognitivos de la adición. *Psiquis, 3,* 21-30.

BERMEJO, V., y RODRÍGUEZ, P. (1987 b): Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40,* 71-81.

BAROODY, A. (1984): Children's difficulties in subtration: Some causes, cures, and questions. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 203-213.

BRIARS, D. y LARKIN, J. (1984): An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1,* 245-296.

CARPENTER, T.; HIEBERT, J. y MOSER, J. (1981): The effect of problem structure on first-grader's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12(1),* 27-39.

CARPENTER, T.; HIEBERT, J. y MOSER, J. (1983): The effect of instruction on children's solutions of addition and subtration word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 55-72.

CARPENTER, T., y MOSER, J. (1982): The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (PP. 9-24). Hillsdale, N. J: Erlbaum.

CARPENTER, T., y MOSER, J. (1983): The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematic concepts and processes* (pp. 7-44). N. York: Academic Press.

CARPENTER, T., y MOSER, J. (1984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 179-202.

CASE, R. (1978): Implications of developmental psychology of the design for instruction. En Glaser, R.: J. Lesgold, J. Pellegrino y J. Fokkema (Eds.), *Advances in instructional psychology.* Hillsdale, N. York: Lawrence Erlbaum Associates.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1985): Beginning first garders initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4,* 3-21.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. y DE WIN, L. (1985): Influence of rewording verbal problem on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77,* 460-470.

FUSON, K. (1984): More complexities in subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 214, 225.

GREENO, J., RILEY, M. y GELMAN, R. (1984): Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology, 16,* 94-143.

GOUWS, D. (1972): Differential perfomance of third-grade children in solving open sentences of four types (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1971). *Dissertation Abstract International, 32,* 3860A.

HARVEY, C.O. (1976): A study of the achievement and transfer effects of additive subtraction and class inclusion training. Unpublished doctoral dissertation, University of Houston.

HELLER, J. y GREENO, J. (1978): Semantic processing in arithmetic word-problem solving. Artículo presentado en la *Mid Western Psychological Association Convention.* Chicago, Mayo.

HIRSTEIN, J. (1979): Children's counting in addition, subtraction, and numeration contexts (Doctoral dissertation, University of Georgia, 1978). *Dissertation Abstracts Internacional, 39,* 7203A.

HUDSON, T. (1983): Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54,* 84-90.

IBARRA, C., y LINDVALL, C. (1979): An investigation of factors associated with children's comprehension of simple story problems involving addition and subtraction prior to formal instruction on these operations. Artículo presentado en *The Annual Meeting of the National Council of Theachers of Matematics.* Boston, Abril.

KINTSCH, W. y GREENO, J. (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92 (1),* 109-129.

MAYER, R. E. (1982): Memory of algebra story problems. *Journal of Educational Psychology, 2,* 199-216.

NESHER, P. (1982): Levels of description in the analysis of addition and subtraction. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N. Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

NESHER, P., y GREENO, J. (1981): Semantic categories of word-problems, reconsidered. *The 5th Conference of the I.G.P.M.E. (International Group of the Psychology of Mathematical Education),* Grenoble, pp. 63-68.

RILEY, M. (1981): Conceptual and procedural knowledge in development. Unpublished Master's Thesis, University of Pittsburg.

RILEY, M., y GREENO, J. (1978): Importance of semantic structure in the difficulty of aritmetic word problems. Artículo presentado en *The Midwestern Psychological Association.*

RILEY, M., y GREENO, J., y HELLER, J. (1983): Development of children's problem-solving ability in aritmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* N. York: Academic Press.

ROSENTHAL, D., y RESNICK, L. (1984): An analysis of kindergarten and first grade children's addition and subraction problem-solving modeling and accuracy. Artículo presentado en el *Annual Meeting of The American Educational Research Association,* San Francisco, Abril.

STEFFE, L., SPILKERS, W., y HIRSTEIN, J. (1976): Quantitative comparissons and class inclusion as readiness variables for learning first grade arithmetical content. Athens, Georgia: *The Georgia Centre for the Study of Learning and Teaching Mathematics.* University of Georgia.

STEINBERG, R. M. (1985): Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal of Research in Mathematics Education, 16,* 337-355.

VERGNAUD, G. (1981): *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berna: Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1982): A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitived perspective.* Hillsdale, N. Jersey: LEA.

WOLTERS, M. (1983: The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 127-138.

ZWENG, M. J.; GERARGHTY, J., y TURNER, J. (1979): *Children's strategies of solving verbal problems.* Iowa City, Iowa: University of Iowa.

(Recibido Mayo de 1988,
aceptado Octubre de 1988)